1.2 Schwingungen von gekoppelten Pendeln

Aufgaben

In diesem Experiment werden die Schwingungen von zwei Pendeln untersucht, die durch eine Feder miteinander gekoppelt sind. Für verschiedene Kopplungsstärken werden die Schwingungsdauern der beiden Grundschwingungen sowie der Schwebung des Systems gemessen und die Schwebungsdauer mit der Erwartung verglichen.

Vorkenntnisse/Grundlagen :

Federverhalten (Hooke'sches Gesetz),Beschreibung von Schwingungen, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, Drehmoment, Trägheitsmoment, Direktionsmoment, einfache lineare Differentialgleichungen.

Literatur :

- Paul A.Tipler : Physik
  Spektrum Lehrbuch, ISBN 3-86025-122-8, S.379 - S.399
- W.Walcher : Praktikum der Physik
  Teubner Studienbücher Physik, ISBN 3-519-13038-6, S.89 - S.98

1.2.1 Die Bewegungsgleichung für das gekoppelte Pendel

Die Anordnung ist schematisch dargestellt in Abb. 1.1. Die Kopplungsfeder ist befestigt in der Entfernung l_F von den Drehachsen. Die (identischen) physikalischen Pendel $P1$ und $P2$ werden so montiert, dass die Feder bei Ruhestellung der Pendel gespannt ist. Dadurch hängen die Pendel in der Ruhestellung (im Gleichgewicht) nicht in der vertikalen V, sondern um den Winkel $\varphi_\circ$ nach innen. Das durch die Feder erzeugte Drehmoment ist

$$M_{F,\circ} = -D_F \cdot x_\circ \cdot l_F \tag{1.1}$$

wobei D_F die Federkonstante und $x_\circ$ ihre Verlängerung gegenüber dem entspannten Zustand ist. In der Ruhestellung ist $M_{F,\circ}$ entgegengesetzt gleich dem durch die Schwerkraft erzeugten Drehmoment

$$M_{S,\circ} = m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_\circ \tag{1.2}$$

wobei l_s die Entfernung des Schwerpunktes jedes der beiden Pendel von seiner Drehachse und m die Gesamtmasse jedes Pendels bedeuten. Wird $P2$ um φ_2 aus der Nullage ausgelenkt, so wirkt

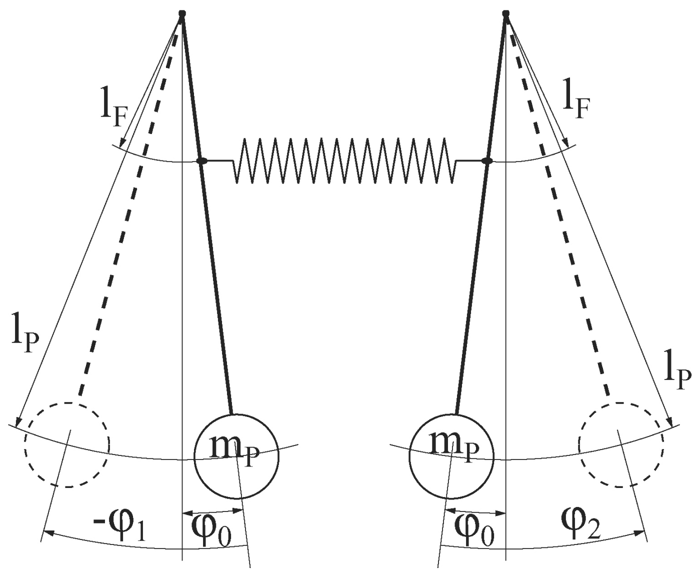

Abbildung 1.1: Gekoppelte Pendel

insgesamt das Drehmoment

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot (\varphi_2 - \varphi_\circ) - D_F \cdot (x_\circ + l_F \varphi_2) \cdot l_F \tag{1.3}$$

oder

$$M_2 = - \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot \varphi_2 \tag{1.4}$$

Wird ausserdem $P1$ um $-\varphi_1$ verschoben, so kommt durch die Feder das Drehmoment $D_F l_F^2 \varphi_1$ hinzu, so dass sich insgesamt ergibt

$$M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.5}$$

Analog wird für $P1$

$$M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.6}$$

Die Bewegungsgleichungen beider Pendel lauten somit

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_1 + D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.7}$$

$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_2 = -m \cdot g \cdot l_s \cdot \varphi_2 - D_F \cdot l_F^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.8}$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$\omega_s^2 = \frac{mgl_s}{J} \tag{1.9}$$

$$\Omega^2 = \frac{D_F l_F^2}{J} \tag{1.10}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_1 + \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.11}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_s^2 \cdot \varphi_2 + \Omega^2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.12}$$

Dies ist ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen. Die Lösung wird mit Hilfe der Substitutionen $\alpha = \varphi_2 + \varphi_1$, $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ erreicht : Summe und Differenz der beiden Gleichungen (24) und (25) führen auf die einfachen Differentialgleichungen

$$\ddot{\alpha} = -\omega_s^2 \cdot \alpha \tag{1.13}$$

$$\ddot{\beta} = -(\omega_s^2 + 2\Omega^2) \cdot \beta = -\omega_{sf}^2 \cdot \beta \tag{1.14}$$

mit den Lösungen

$$\alpha(t) = \varphi_2(t) + \varphi_1(t) = A \cdot \sin(\omega_s t) + B \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.15}$$

$$\beta(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = C \cdot \sin(\omega_s t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.16}$$

Die Konstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Liegen beim Start der Bewegung keine Anfangswinkelgeschwindigkeiten vor, d.h. $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$, so wird $A = C = 0$ und aus der Summe der Gleichungen (32) und (33) wird

$$2\varphi_2(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) + D \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.17}$$

$$2\varphi_1(t) = B \cdot \cos(\omega_s t) - D \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.18}$$

Werden die Pendel aus den Positionen $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und $\varphi_2(t=0) = \varphi_{max}$ gestartet, so wird $D = 0$ und $B = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen gleichsinnig gemäss

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \tag{1.19}$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) \tag{1.20}$$

mit der Kreisfrequenz ω_s, d.h. der Kreisfrequenz jedes Pendels ohne Kopplung.
Werden die Pendel aus den entgegengesetzten Positionen $\varphi_1(t=0) = -\varphi_{max}$, $\varphi_2(t=0) = +\varphi_{max}$ gestartet, so wird $B = 0$ und $D = 2\varphi_{max}$ und die Pendel schwingen gegensinnig :

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.21}$$

$$\varphi_1(t) = -\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.22}$$

mit der Kreisfrequenz ω_{sf} :

$$\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2 \tag{1.23}$$

Wird die Schwingung mit Pendel $P1$ mit $\varphi_1(t=0) = \varphi_{max}$ und Pendel $P2$ in Ruheposition, $\varphi_2(t=0) = 0$ gestartet, so wird $B = D = \varphi_{max}$ und

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.24}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_s t) - \frac{1}{2}\varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sf} t) \tag{1.25}$$

Jedes Pendel schwingt mit einer Überlagerung von zwei verschiedenen Frequenzen. Mit Hilfe eines Additionstheorems für trigonometrische Funktionen lassen sich die Gleichungen umschreiben in

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2} t) \cdot \cos(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2} t) \tag{1.26}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2} t) \cdot \sin(\frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2} t) \tag{1.27}$$

Mit den Abkürzungen

$$\omega_k = \frac{\omega_{sf} + \omega_s}{2} \tag{1.28}$$

$$\omega_{sch} = \frac{\omega_{sf} - \omega_s}{2} \tag{1.29}$$

wird daraus

$$\varphi_1(t) = \varphi_{max} \cdot \cos(\omega_{sch} t) \cdot \cos(\omega_k t) \tag{1.30}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\omega_{sch} t) \cdot \sin(\omega_k t) \tag{1.31}$$

Die Bewegung jedes der beiden Pendel besteht also aus der Überlagerung zweier Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_{sch} und ω_k. Sie kann als Schwingung der höheren Frequenz ω_k angesehen werden, die mit der niedrigeren Frequenz ω_{sch} moduliert ist. Diese Erscheinung wird Schwebung genannt.

1.2.2 Messgrössen

Der Messung zugänglich sind die Schwingungsdauern :

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \tag{1.32}$$

$$T_{sf} = \frac{2\pi}{\omega_{sf}} \tag{1.33}$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} + \omega_s} \tag{1.34}$$

$$T_{sch} = \frac{2\pi}{\omega_{sch}} = \frac{4\pi}{\omega_{sf} - \omega_s} \tag{1.35}$$

Durch Einsetzen von ω_s und ω_{sf} ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Schwingungsdauern :

$$T_k = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s + T_{sf}} \tag{1.36}$$

$$T_{sch} = 2 \cdot \frac{T_s T_{sf}}{T_s - T_{sf}} \tag{1.37}$$

Als Kopplungsgrad κ des Pendelsystems wird das Verhältnis

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{\omega_s^2 + \Omega^2} = \frac{D_F l_F^2}{mgl_s + D_F l_F^2} \tag{1.38}$$

definiert. Mit $\omega_{sf}^2 = \omega_s^2 + 2\Omega^2$ folgt

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 - \omega_s^2)}{\frac{1}{2}(\omega_{sf}^2 + \omega_s^2)} = \frac{T_s^2 - T_{sf}^2}{T_s^2 + T_{sf}^2} \tag{1.39}$$

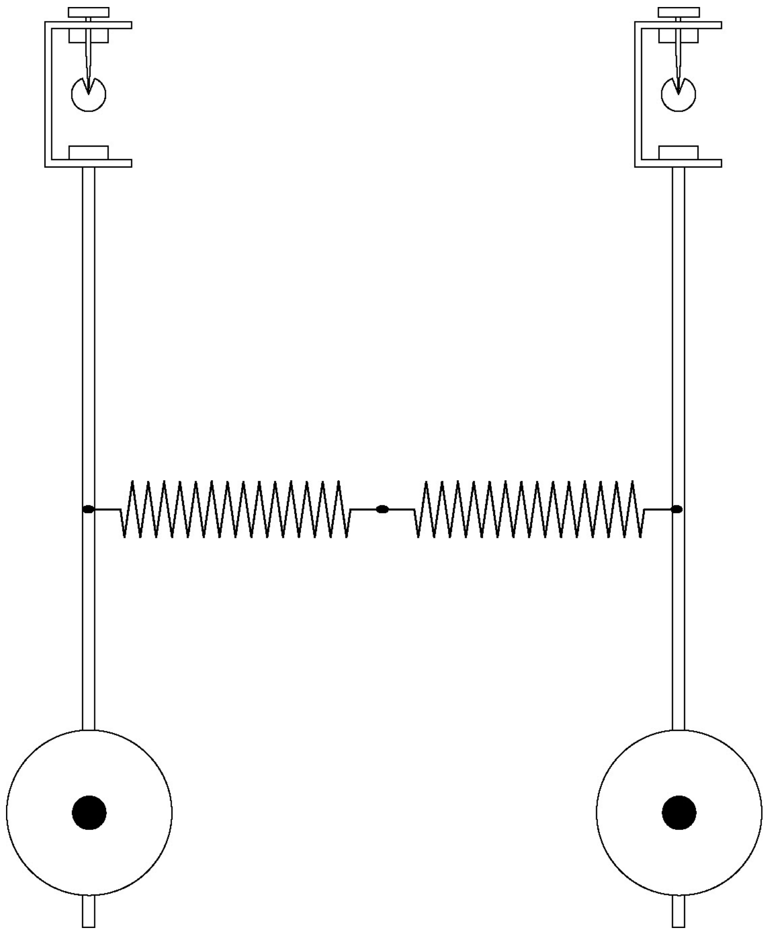

Abbildung 1.2: Aufbau des gekoppelten Pendels

Der Kopplungsgrad ist umso kleiner (die Kopplung also umso schwächer), je näher die Befestigungspunkte der Feder an den Drehachsen der Pendel liegen. Trägt man $\frac{1}{\kappa}$ als Funktion von $\frac{1}{l_F^2}$ auf so ergibt sich eine Gerade, aus deren Steigung die Federkonstante ermittelt werden kann :

$$\frac{1}{\kappa} = 1 + \frac{m l_s g}{D_F} \cdot \frac{1}{l_F^2} \tag{1.40}$$

1.2.3 Versuchsaufbau und Durchführung

Der Versuchsaufbau ist ähnlich wie beim einfachen Pendel (Kap. **??**). Es werden nun zwei Pendel im Abstand von ca. 50 cm an dem Gestell befestigt und über ein Federpaar gekoppelt (Abb. 1.2). Die Federn können in verschiedenen Höhen an den Pendelstangen befestigt werden, wodurch unterschiedliche Kopplungskonstanten erzielt werden. Da die Federn nicht gestaucht werden können, müssen die Pendel so weit auseinander sein, dass die Federn in der Ruhelage schon gespannt sind. Es muß darauf geachtet werden, daß die Pendelauschläge so klein bleiben, daß die Federn nie völlig entspannt sind.
Beide Winkelaufnehmer können gleichzeitig mit einem CASSY-Modul ausgelesen werden und haben einen unabhängigen Nullabgleich. Um eine günstige Darstellung auf dem Bildschirm zu

erzielen, kann die Nulllage eines Pendels entweder durch die Versorgungsspannung des Winkelaufnehmers oder durch Einstellung eines Offsets in der CASSY-Software verschoben werden.
Es werden die Pendelausschläge aufgenommen und die Fouriertransformierten bestimmt. Im allgemeinen Fall erhält man eine Schwebung, die eine Überlagerung aus zwei Schwingungen mit dicht benachbarten Frequenzen ist. Im Fourierspektrum erkennt man deshalb zwei Spitzen, die mit wachsender Kopplungsstärke zusammenrücken. Lässt man die Pendel gleichsinnig (in Phase) schwingen, so taucht nur die kleinere der beiden Frequenzen auf. Schwingen die Pendel gegensinnig, so erhält man im Spektrum nur die Spitze der höheren Frequenz. Um den Fehler der Frequenzmessung zu erhalten wird eine Messung mehrmals durchgeführt und die mittlere quadratische Abweichung zum Mittelwert bestimmt.
Aus den gemessenen Frequenzen wird der Kopplungsgrad κ bestimmt (Gl.1.39). Außerdem werden die Abstände l_F zwischen dem Aufhängepunkt des Pendels und der Befestigung der Feder gemessen. Trägt man $\frac{1}{\kappa}$ gegen $\frac{1}{l_F^2}$ auf, so erhält man eine Gerade, aus deren Steigung man die Federkonstante ermitteln kann (Gl. 1.40).